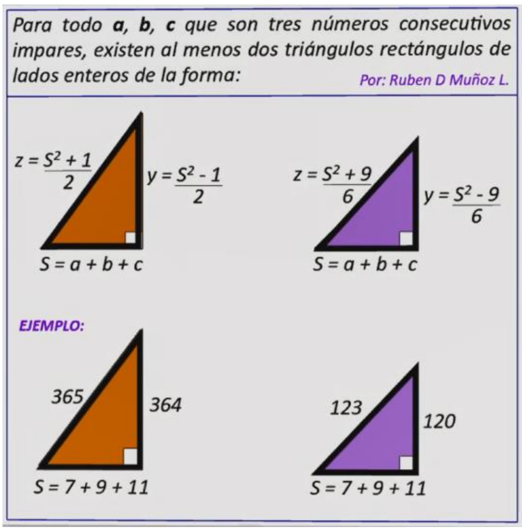
Rubén Darío Muñoz López

Más allá del teorema de Pitágoras

DETERMINACIÓN DE LA CANTIDAD DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS DE LADOS ENTEROS PARA CATETO MENOR IMPAR MÚLTIPLOS DE 3

En este artículo se presenta un método para determinar a priori, que si un triángulo rectángulo de lados enteros tiene como cateto menor a un número impar ***S*** que puede descomponerse a su vez en la suma de tres números impares consecutivos ***a***, ***b***, ***c***; existen al menos dos ternas pitagóricas para dicho triangulo. Es decir, si la suma de tres números impares consecutivos ***a***, ***b***, ***c*** se toma como dimensión del cateto menor de un triángulo rectángulo, siempre existen al menos dos ternas pitagóricas enteras, siendo una de ellas primitiva.

El siguiente gráfico publicado en el libro Más allá del teorema de Pitágoras, se presenta un ejemplo.



Conjunto de números naturales impares

Dado el conjunto de números impares λ es un concepto elemental de aritmética, el artículo se centra solamente en la composición de sucesiones de tres términos.

$$\lambda = (1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots, (2n+1)) \dots \quad (1)$$

Estableciendo subconjuntos de tres elementos tal como:

$\lambda = (1, 3, 5)$

$\lambda = (3, 5, 7)$

$\lambda = (5, 7, 9)$

$\lambda = (7, 9, 11)$

$\dots$

$\dots$

$\lambda = (2n-1, 2n+1, 2n+3)$

En general, para la terna ***a***, ***b***, ***c*** tal que:

$a = 2n - 1, \qquad b = 2n + 1, \qquad c = 2n + 3$

Término del medio: $2n + 1$

Términos extremos: $2n - 1$ y $2n + 3$.

La suma ***S*** = ***a*** + ***b*** + ***c*** está dada por:

$S_{a+b+c} = 6n + 3$

$S_{a+b+c} = 3(2n + 1) \dots (2)$

Por tanto, la suma de tres números impares consecutivos es impar y múltiplo de 3.

Teorema de Pitágoras

$$x^2 + y^2 = z^2$$

$$k = z - y$$

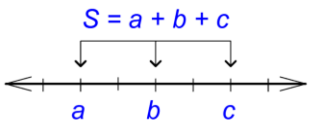
El cateto mayor y la hipotenusa está dada por las expresiones generales:

$$y = \frac{x^2 - k^2}{2k} \dots (3) \wedge z = \frac{x^2 + k^2}{2k} \dots (4)$$

Nota: la explicación de estas expresiones puede revisarse en el libro Más allá del teorema de Pitágoras del autor de este artículo.

Para cateto menor S

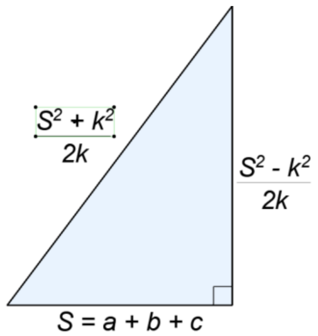
Si se toman tres números impares consecutivos ***a***, ***b***, ***c***.



Si: $S = a + b + c$, tal que ***S*** es cateto menor, de (3) y (4) se tiene que el cateto mayor e hipotenusa son:

$$y = \frac{S^2 - k^2}{2k}$$

$$z = \frac{S^2 + k^2}{2k}$$



Siempre existen ternas pitagóricas para el conjunto, que corresponde a la diferencia aritmética entre la hipotenusa y el cateto mayor: $k = \{1{,}3, b\}$.

Es decir si el cateto menor es ***S***, los catetos mayores y las hipotenusas serán:

$$y_1 = \frac{S^2 - 1}{2} \wedge z_1 = \frac{S^2 + 1}{2}$$

$$y_3 = \frac{S^2 - 3^2}{2(3)} \wedge z_3 = \frac{S^2 + 3^2}{2(3)}$$

$$y_b = \frac{S^2 - b^2}{2(b)} \wedge z_b = \frac{S^2 + b^2}{2(b)}$$

Por lo tanto, para *k = 1*, *k = 3* y *k = b* siempre existen ternas pitagórica enteras para cateto menor *S = a + b + c*, tal que ***a***, ***b***, ***c*** son tres números naturales impares consecutivos.

En cambio sí: $a = 3n$ no existe solución entera para $k = c$

$$y = \frac{S^2 - c^2}{2k} \rightarrow \nexists \wedge y = \frac{S^2 + c^2}{2k} \rightarrow \nexists$$

De la misma forma si: $c = 3n$ no existe solución entera para $k = a$

$$y = \frac{S^2 - a^2}{2k} \rightarrow \nexists \wedge y = \frac{S^2 + a^2}{2k} \rightarrow \nexists$$

Es decir no existen ternas pitagóricas enteras para *k = a* ó *k = c* al mismo tiempo, pero si para el termino extremo si este es múltiplo de 3. Tampoco existen ternas enteras para los extremos que no son múltiplos de 3.

Es decir ***k*** siempre será ***2n + 1.*** Así mismo ***k=1 y k=3*** serán comunes a todas las ternas de este tipo.

Tabla para valores *k* obligatorios

En la siguiente tabla se presentan todos los valores ***k*** para los números impares del 9 al 57. Como puede apreciarse siempre existen los valores comunes 1 y 3, también el valor de ***b*** y la alternancia de los extremos ***a*** y ***c*** dependiendo de si son múltiplos de 3.

$S_{1+3+5} = 3(3) = 9$	$k_9 = \{1{,}3\}$
$S_{3+5+7} = 3(5) = 15$	$k_{15} = \{1{,}3{,}5{,}9\}$
$S_{5+7+9} = 3(7) = 21$	$k_{21} = \{1{,}3{,}7{,}9\}$
$S_{7+9+11} = 3(9) = 27$	$k_{27} = \{1{,}3{,}9\}$
$S_{9+11+13} = 3(11) = 33$	$k_{33} = \{1{,}3{,}9{,}11\}$
$S_{11+13+15} = 3(13) = 39$	$k_{39} = \{1{,}3{,}9{,}13\}$
$S_{13+15+17} = 3(15) = 45$	$k_{45} = \{1{,}3{,}5{,}915{,}25{,}27\}$
$S_{15+17+19} = 3(17) = 51$	$k_{51} = \{1{,}3{,}9{,}17\}$
$S_{17+19+21} = 3(19) = 57$	$k_{57} = \{1{,}3{,}9{,}19\}$

Del comportamiento de las sumas se desprende que:

$$S_{a+b+c} = 3(b) \Rightarrow b = \frac{S}{3} \ldots (5)$$

EJERCICIO

Determine la cantidad mínima de triángulos rectángulos de lados enteros para cateto menor 63.

SOLUCIÓN

Descomponiendo: $63 = 19 + 21 + 23$

Existen al menos tres triangulo rectángulos de lados enteros cuando las diferencia entre hipotenusa y cateto mayor es el siguiente conjunto: $k_{63} = \{1,3,21\}$.

Aplicando métodos analíticos se sabe 7 triángulos rectángulos de lados enteros tienen a 63 como cateto menor

$k_{63} = \{1,3,7,9,21,27,49\}$

DEMOSTRACIONES

A continuación se realizan las demostraciones para los casos propuestos.

Para ***k* = *1***

Reemplazando en las fórmulas generales el valor de ***k*** por 1 se tiene:

Cateto menor

$S = 3(2n+1)$

Cateto mayor

$$y_1 = \frac{\left(3(2n+1)\right)^2 - 1}{2}$$

$$y_1 = 18n^2 + 18n + 4$$

Hipotenusa

$$z_1 = \frac{\left(3(2n+1)\right)^2 + 1}{2}$$

$$z_1 = 18n^2 + 18n + 1$$

Todos los cocientes resultan enteros, por tanto queda demostrado lo enunciado para ***k*=*1***.

Para ***k* = *3***

Reemplazando en las fórmulas generales el valor de ***k*** por 3 se tiene:

Cateto menor

$S = 3(2n+1)$

Cateto mayor

$$y_3 = \frac{\left(3(2n+1)\right)^2 - 9}{6}$$

$$y_3 = 6n^2 + 6n$$

Hipotenusa

$$z_1 = \frac{\left(3(2n+1)\right)^2 + 9}{6}$$

$$z_1 = 6n^2 + 6n + 3$$

Todos los cocientes resultan enteros, por tanto queda demostrado lo enunciado para ***k*=*3***.

Para ***k* = *b***

Reemplazando en las fórmulas generales el valor de ***k*** por *b = 2n + 1* se tiene:

Cateto menor

$S = 3(2n+1)$

Cateto mayor

$$y_b = \frac{\left(3(2n+1)\right)^2 - (2n+1)^2}{2(2n+1)}$$

$$y_b = 4(2n+1)$$

Hipotenusa

$$z_b = \frac{\left(3(2n+1)\right)^2 + (2n+1)^2}{2(2n+1)}$$

$$z_b = 5(2n+1)$$

Todos los cocientes resultan enteros, por tanto queda demostrado lo enunciado para ***k*=*b***.

De (5) se tiene que como: $b = \frac{S}{3}$ remplazando en (3) y (4) se tiene:

$$y_b = \frac{S^2 - \frac{S^2}{9}}{2(\frac{S}{3})} = \frac{4S}{3} \wedge y_z = \frac{S^2 + \frac{S^2}{9}}{2(\frac{S}{3})} = \frac{5S}{3}$$

Por tanto si *S* = *a* + *b* + *c*, se cumple para la diferencia pitagórica ***k*** = ***b*** que el cateto mayor resulta ser 4/3 de ***S*** y la hipotenusa los 5/3 de ***S***.

TEOREMA

Si se suman tres números enteros consecutivos positivos ***a***, ***b***, ***c*** siempre existirán al menos dos ternas pitagóricas para cateto menor igual a la suma de los números consecutivos ***S*** = ***a*** + ***b*** + ***c*** tal que:

$$S^2 + R^2 = T^2$$

Siendo ***R*** y ***T***:

$$R_1 = \frac{S^2 - 1}{2} \wedge T_1 = \frac{T^2 + 1}{2} \text{ ó}$$

$$R_3 = \frac{S^2 - 9}{6} \wedge T_3 = \frac{T^2 + 9}{6}$$

Así mismo, siempre existirá solución entera para ***k*** = ***b*** (número impar del medio) de tal forma que cumpla con:

$$R_b = \frac{S^2 - b^2}{2b} \wedge T_b = \frac{T^2 - b^2}{2b}$$

DEMOSTRACIÓN ADICIONAL

$$R = \frac{(3(2n+1))^2 - (2n+1)^2}{2(2n+1)} = \frac{16n + 8}{2}$$

$$R = 8n + 4 \Rightarrow R = 4(2n+1)$$

R es cuatro veces el valor de ***b***. Por tanto ***T*** será:

$$T = R + (2n+1)$$

$$T = 4(2n+1) + (2n+1)$$

$$\Rightarrow T = 5(2n+1)$$

La hipotenusa es cinco veces el valor de ***b***, lo cual induce a determinar que la terna (*S*, *R*, *T*) conforma un triángulo rectángulo de lados enteros semejante al triangulo (3, 4, 5) para un ***k = 2n + 1*** y un cateto menor igual a un múltiplo de 3.

EJERCICIO *Por Rubén D Muñoz L - 2021*

Hallar tres números naturales impares consecutivos ***a***, ***b***, ***c*** tal que su suma sea cateto de 7 triángulos rectángulos de lados enteros; siendo ***b*** múltiplo de 3 y diferencia entre hipotenusa y cateto mayor de uno de los triángulos rectángulos.

RESPUESTA

$a = 13, \quad b = 15, \quad c = 17$

$\Rightarrow a + b + c = 45$

$$45^2 + 1012^2 = 1013^2 \Rightarrow k = 1$$
$$45^2 + 336^2 = 339^2 \Rightarrow k = 3$$
$$45^2 + 200^2 = 205^2 \Rightarrow k = 5$$
$$45^2 + 108^2 = 117^2 \Rightarrow k = 9$$
$$45^2 + 60^2 = 75^2 \Rightarrow k = 15$$
$$45^2 + 28^2 = 53^2 \Rightarrow k = 25$$
$$45^2 + 24^2 = 51^2 \Rightarrow k = 27$$

¿Existirán otros valores para a, b, c?

COMENTARIO FINAL

Se sugiere al lector revisar libro Más allá del teorema de Pitágoras - volumen II, 3° edición de 2020 en la encontrara el método general para hallar todas las ternas pitagóricas dado un numero cualesquiera como valor de cateto menor, incluyendo números reales y complejos.

Rubén Darío Muñoz López

Más allá del teorema de Pitágoras

2021

ANEXO

El mismo modo se puede llegar a conclusiones similares cateto menor igual a la suma de ***2m + 1*** números impares consecutivos.

Por ejemplo para cinco números impares consecutivos:

$\lambda = (1,3,5,7,9)$

$\lambda = (3,5,7,9,11)$

$\lambda = (5,7,9,11,13)$

$\lambda = (7,9,11,13,15)$

…

…

$\lambda = (2n+1, 2n+3, 2n+5, 2n+7, 2n+9)$

La suma ***S = a + b + c + d + e*** está dada por:

$S_{a+b+c+d+e} = 10(n-1) + 25$ …(6)

$S_{1+3+5+\cdots 9} = 5(5) = 25$	$k_{25} = \{1,5\}$
$S_{3+5+7+\cdots 11} = 5(7) = 35$	$k_{35} = \{1,5,7,25\}$
$S_{5+7+9+\cdots 13} = 5(9) = 45$	$k_{45} = \{1,3,5,9,15,25,27\}$
$S_{7+9+11+\cdots 15} = 5(11) = 55$	$k_{55} = \{1,5,11,25\}$
$S_{9+11+13+\cdots 17} = 5(13) = 65$	$k_{65} = \{1,5,13,25\}$
$S_{11+13+15+\cdots 19} = 5(15) = 75$	$k_{75} = \{1,3,5,9,15,25,45\}$
$S_{13+15+17+\cdots 21} = 5(17) = 85$	$k_{85} = \{1,5,17,25\}$
$S_{15+17+19+\cdots 23} = 5(19) = 95$	$k_{95} = \{1,5,19,25\}$

Por tanto, la suma de cinco números impares consecutivos es impar y múltiplo de 5. Por lo tanto, siempre existirá una terna pitagórica de cateto menor ***S*** para diferencias pitagóricas ***k=1 y k=5*** y para el término del medio, en este caso ***k=c***.

EJERCICIO

Determine al menos tres ternas pitagóricas de lados enteros para cateto menor igual a la suma de cinco números impares consecutivos, tal que S_{105}.

SOLUCIÓN

$S_{17+19+21+23+25} = 5(21) = 105$

$S_{17+19+21+23+25} = 5(21) = 105$

$k_{105} = \{1,5,21\}$

Y el total de elementos para ***k*** es:

$k_{105} = \{1,3,5,7,9,15,21,25,35,45,49,63,75\}$

En general la suma de varios números impares consecutivos se puede expresar de la siguiente manera:

$$\underbrace{2n+1, 2n+3, 2n+5, + \cdots + (2n+2m-1)}_{m}$$

$$\boldsymbol{S_m = 2nm + m^2}$$

Donde ***m*** siempre debe ser impar, veamos la siguiente tabla.

Para n=	*0*	*Para n =*	*1*	*Para n =*	*2*
m	***S***	***m***	***S***	***m***	***S***
1	*1*	*1*	*3*	*1*	*5*
3	*9*	*3*	*15*	*3*	*21*
5	*25*	*5*	*35*	*5*	*45*
7	*49*	*7*	*63*	*7*	*77*
9	*81*	*9*	*99*	*9*	*117*
11	*121*	*11*	*143*	*11*	*165*
13	*169*	*13*	*195*	*13*	*221*
15	*225*	*15*	*255*	*15*	*285*

Explicación de la tabla

Para determinar la suma de números impares m términos, solamente se debe identificar en la tabla la fila donde se ubican "m" los valores correspondientes en las columnas S son las sumas para según en que numero empiece la sumatoria, para n=0 empieza en 1, para n=2 empieza en 3, para n==2 empieza en 5 y así sucesivamente; considerando que el numero en que empieza es 2m – 1.

Rubén Darío Muñoz López

Más allá del teorema de Pitágoras

2021