

EL NUMERO DE ORO Y LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS NOTABLES ESPECIALES

Por Ruben D. Muñoz L.

2021

*Con agradecimiento especial a las personas que colaboran en el grupo: **Más allá del teorema de Pitágoras**, y con las disculpas adelantadas por cualquier error u omisión que pudiera existir en el artículo, observaciones que serán bienvenidas.*

ÁNGULOS NOTABLES Y LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Los ángulos notables son aquellos cuyas funciones trigonométricas se pueden establecer en forma precisa con base a ciertas expresiones completamente determinadas; como por ejemplo: el seno de 30 grados es $\frac{1}{2}$.

Existen evidencias arqueológicas suficientes para considerar que los ángulos notables fueron conocidos hace más de 3500 años. Los babilonios y los antiguos egipcios relacionaron con precisión la dimensión de los lados de un triángulo rectángulo con ciertos ángulos, a los que hoy denominamos ángulos notables como: 30° , 45° o 60° entre otros

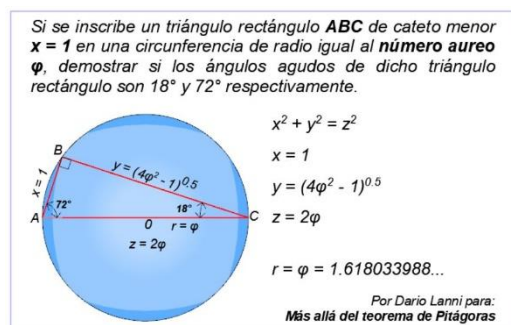
La mayoría de los tratados al respecto consideran las funciones trigonométricas para ángulos notables para un espectro bastante reducido, pues en la mayoría de las tablas las fórmulas para determinar las funciones trigonométricas de ángulos notables no están todas las que son ni tampoco son todas las que están. En este artículo se extiende la determinación de funciones trigonométricas para ángulos múltiplos de 3: **3, 6, 9, 12, 15, ..., 3n** mediante fórmulas basadas en el número áureo o número de oro ϕ .

$$\phi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

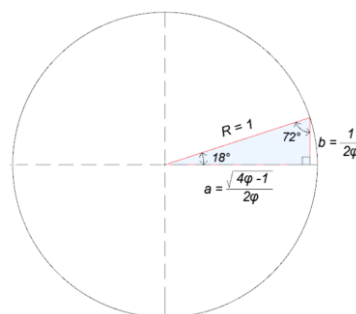
FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS PARA ÁNGULOS NOTABLES DEL PRIMER CUADRANTE

	0	30	45	60	90
Sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞
Cot		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
Sec	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	∞
Csc	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1

El proceso está basado en el descubrimiento de que un triángulo rectángulo de cateto menor 1 tiene por hipotenusa a dos veces el número áureo. Este descubrimiento conllevó a la publicación de un problema en la página Más allá del teorema de Pitágoras y la página Dario Lanni Matemáticas en FB. donde entre otras publicaciones se encuentran diversos descubrimientos relacionados al afamado teorema de Pitágoras.



Transformando dicho triángulo convenientemente para posicionarlo en un círculo unitario se tiene que para un ángulo de 18° las funciones trigonométricas están reducidas en función del número áureo:



$$\text{sen } 18^\circ = \frac{1}{\sqrt{5} + 1} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} = \frac{1}{2\phi}$$

$$\text{cos } 18^\circ = \frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{\sqrt{5} + 1} = \frac{\sqrt{4\phi^2 - 1}}{2\phi}$$

$$\text{tan } 18^\circ = \frac{1}{\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}} = \frac{1}{\sqrt{4\phi^2 - 1}}$$

$$\text{cot } 18^\circ = \sqrt{5 + 2\sqrt{5}} = \sqrt{4\phi^2 - 1}$$

$$\text{sec } 18^\circ = \frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}} = \frac{2\phi\sqrt{4\phi^2 - 1}}{4\phi^2 - 1}$$

$$\text{csc } 18^\circ = \sqrt{5} + 1 = 2\phi$$

Del mismo modo se pueden obtener las funciones trigonométricas para el ángulo de 72° .

La cosecante nos da un indicio de las particularidades potentes que tiene el operar con el número áureo, pues es uno de los pocos números que las sumas o diferencias simples se pueden transformar en cocientes elementales y viceversa:

$$\csc 18^\circ = \frac{4}{\sqrt{5}-1} = \sqrt{5} + 1 = 2\varphi$$

No se va a ahondar sobre el número áureo, pues existen tratados ampulosos en los que se puede consultar, sin embargo se resalta el hecho de que es el único número que una diferencia con la unidad puede ser transformada en un su inverso.

$$\varphi - 1 = \frac{1}{\varphi}$$

O el caso de que sus potencias sean igual a sumas sencillas que lo contienen.

$$\varphi^2 = \varphi + 1$$

$$\varphi^3 = 2\varphi + 1$$

Aplicando funciones trigonométricas para ángulos dobles, triples, ángulo mitad o sumas y diferencias de ángulos se puede extender primeramente a 36° y 54° y que por supuesto estarán relacionadas al número áureo φ y cuyo valor será exacto.

Continuando con el proceso es posible extender el conjunto de ángulos notables para ángulos del primer cuadrante.

Ángulos pares múltiplos de 6:

6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, ..., etc.

Y para ángulos impares múltiplos de 3:

3, 9, 15, 21, 27, 33, 39, ..., etc.

Así mismo, aplicando el teorema de Pitágoras se tiene también evidentemente que: $1 + (\sqrt{4\varphi - 1})^2 = 4\varphi^2$

EXPRESIONES BÁSICAS DE φ

En este artículo se utilizarán básicamente las siguientes expresiones para simplificar las formulas generadas con radicales.

$$\varphi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \quad \wedge \quad \varphi - 1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

$$\frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{5} + 1}{4} \quad \wedge \quad \frac{\varphi - 1}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$

$$2\varphi = \sqrt{5} + 1 \quad \wedge \quad 2(\varphi - 1) = \sqrt{5} - 1$$

$$\varphi^2 = \frac{(\sqrt{5} + 1)^2}{4} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

$$4\varphi^2 = 6 + 2\sqrt{5} \quad \wedge \quad 4\varphi^2 - 1 = 5 + 2\sqrt{5}$$

FÓRMULAS BÁSICAS

Las fórmulas empleadas para obtener las funciones trigonométricas derivada de otras son las siguientes:

Para ángulo mitad:

$$\operatorname{sen} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

$$\operatorname{cos} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

$$\operatorname{tan} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$$

Para ángulo doble:

$$\operatorname{sen} (2x) = 2 \operatorname{sen} x \operatorname{cos} x$$

$$\operatorname{cos} (2x) = \operatorname{cos}^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$

$$\operatorname{tan} (2x) = \frac{2 \operatorname{tan} x}{1 - \operatorname{tan}^2 x}$$

El seno¹ para ángulo de 3° esta dado por:

$$\frac{(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{6} + \sqrt{2}) - 2(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{5 + \sqrt{5}})}{16}$$

Reemplazando valores hasta donde permita:

$$\frac{(\varphi - 1)(\sqrt{6} + \sqrt{2}) - (\sqrt{3} - 1)(\sqrt{2\varphi + 4})}{8}$$

A continuación se presenta un conjunto de fórmulas obtenidas para el seno y coseno de algunos ángulos que también deben ser considerados como notables.

$$\text{sen } 6^\circ = \text{cos } 84^\circ = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4\varphi - 1 - \sqrt{12\varphi + 9}}{2\varphi}}$$

$$\text{sen } 9^\circ = \text{cos } 81^\circ = \pm \sqrt{\frac{2\varphi - \sqrt{4\varphi + 3}}{4\varphi}}$$

$$\text{sen } 9^\circ = \text{cos } 81^\circ = \pm \sqrt{\frac{2\varphi - \sqrt{4\varphi^2 - 1}}{4\varphi}}$$

$$\text{sen } 12^\circ = \text{cos } 78^\circ = \frac{\sqrt{4\varphi^2 - 1} - \sqrt{3}}{4\varphi}$$

$$\text{sen } 12^\circ = \text{cos } 78^\circ = \frac{\sqrt{4\varphi + 3} - \sqrt{3}}{4\varphi}$$

$$\text{sen } 18^\circ = \text{cos } 72^\circ = \frac{1}{2\varphi} = \frac{\varphi - 1}{2} =$$

$$\text{sen } 36^\circ = \text{cos } 54^\circ = \pm \frac{1}{2} \sqrt{3 - \varphi} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\varphi - 1}{\varphi}} =$$

$$\text{sen } 54^\circ = \text{cos } 36^\circ = \frac{\varphi}{2}$$

$$\text{sen } 72^\circ = \text{cos } 18^\circ = \frac{\sqrt{4\varphi^2 - 1}}{2\varphi}$$

$$\text{sen } 72^\circ = \text{cos } 18^\circ = \frac{\sqrt{4\varphi + 3}}{2\varphi}$$

$$\text{sen } 78^\circ = \text{cos } 12^\circ = \frac{\sqrt{12\varphi^2 - 3} + 1}{4\varphi}$$

$$\text{sen } 78^\circ = \text{cos } 12^\circ = \frac{\sqrt{12\varphi + 9} + 1}{4\varphi}$$

A continuación se presentan algunos desarrollos para su verificación por el lector.

ÁNGULO DE 72°

$$\text{sen } 72^\circ = \frac{\sqrt{4\varphi^2 - 1}}{2\varphi} = \frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{\sqrt{5} + 1}$$

$$\text{cos } 72^\circ = \frac{1}{2\varphi} = \frac{1}{\sqrt{5} + 1} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$

$$\text{tan } 72^\circ = \sqrt{4\varphi^2 - 1} = \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$$

ÁNGULOS DE 9° - 81°

$$\text{sen } 9^\circ = \pm \sqrt{\frac{1 - \text{cos } 18^\circ}{2}}$$

$$\text{sen } 9^\circ = \pm \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{5} + 2\sqrt{5}}{\sqrt{5} + 1}}{2}}$$

$$\text{sen } 9^\circ = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{5} + 1 - \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{2\sqrt{5} + 2}}$$

$$\text{sen } 9^\circ = \pm \sqrt{\frac{2\varphi - \sqrt{4\varphi + 3}}{4\varphi}}$$

$$\text{sen } 81^\circ = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{5} + 1 + \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{2\sqrt{5} + 2}}$$

$$\text{cos } 9^\circ = \pm \sqrt{\frac{1 + \text{cos } 18^\circ}{2}}$$

$$\text{cos } 9^\circ = \pm \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{5} + 2\sqrt{5}}{\sqrt{5} + 1}}{2}}$$

$$\text{cos } 9^\circ = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{5} + 1 + \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{2\sqrt{5} + 2}}$$

$$\text{cos } 9^\circ = \pm \sqrt{\frac{2\varphi + \sqrt{4\varphi + 3}}{4\varphi}}$$

$$\text{cos } 81^\circ = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{5} + 1 - \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{2\sqrt{5} + 2}}$$

ÁNGULOS DE 36° - 54°

$$\text{sen } 36^\circ = \pm \sqrt{\frac{1 - \text{cos } 72^\circ}{2}}$$

$$\text{sen } 36^\circ = \pm \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{5} - 1}{4}}{2}}$$

$$\operatorname{sen} 36 = \pm \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}} = \pm \sqrt{\frac{3 - \varphi}{4}}$$

$$\operatorname{cos} 36 = \frac{\varphi}{2}$$

ÁNGULOS DE 12° - 78°

$$\operatorname{sen} 12^\circ = \operatorname{sen} (30^\circ - 18^\circ)$$

$$\operatorname{sen} 30^\circ \operatorname{cos} 18^\circ - \operatorname{cos} 30^\circ \operatorname{sen} 18^\circ$$

$$\operatorname{sen} 12^\circ = \frac{1}{2} \operatorname{cos} 18^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} 18^\circ$$

Pero:

$$\operatorname{sen} 18 = \frac{1}{2\varphi} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$

$$\operatorname{cos} 18 = \frac{\sqrt{4\varphi^2 - 1}}{2\varphi} = \frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{\sqrt{5} + 1}$$

Entonces:

$$\operatorname{sen} 12^\circ = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{\sqrt{5} + 1} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$

$$\operatorname{sen} 12^\circ = \frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{2\sqrt{5} + 2} - \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{8}$$

$$\operatorname{sen} 12^\circ = \frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{3}}{2\sqrt{5} + 2}$$

También

$$\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{4\varphi^2 - 1}}{2\varphi} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2\varphi}$$

$$\operatorname{sen} 12^\circ = \frac{\sqrt{4\varphi^2 - 1} - \sqrt{3}}{4\varphi}$$

De la misma forma procedemos con el coseno:

$$\operatorname{cos} 12^\circ = \operatorname{cos} (30^\circ - 18^\circ)$$

$$\operatorname{cos} 30^\circ \operatorname{cos} 18^\circ + \operatorname{sen} 30^\circ \operatorname{sen} 18^\circ$$

$$\operatorname{cos} 12^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{cos} 18^\circ + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 18^\circ$$

$$\operatorname{cos} 12^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{\sqrt{5} + 1} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$

$$\operatorname{cos} 12^\circ = \frac{\sqrt{3}\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{2(\sqrt{5} + 1)} + \frac{\sqrt{5} - 1}{8}$$

$$\operatorname{cos} 12^\circ = \frac{\sqrt{15 + 6\sqrt{5}} + 1}{2(\sqrt{5} + 1)}$$

También:

$$\operatorname{cos} 12^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{4\varphi^2 - 1}}{2\varphi} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2\varphi}$$

$$\operatorname{cos} 12^\circ = \frac{\sqrt{3}\sqrt{4\varphi^2 - 1}}{4\varphi} + \frac{1}{4\varphi}$$

$$\operatorname{cos} 12^\circ = \frac{\sqrt{12\varphi^2 - 3} + 1}{4\varphi}$$

ÁNGULOS DE 6° - 84°

$$\operatorname{sen} 6^\circ = \pm \sqrt{\frac{1 - \operatorname{cos} 12^\circ}{2}}$$

$$\operatorname{sen} 6^\circ = \pm \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{15 + 6\sqrt{5}} + 1}{2(\sqrt{5} + 1)}}{2}}$$

$$\operatorname{sen} 6^\circ = \pm \sqrt{\frac{\frac{2\sqrt{5} + 2 - \sqrt{15 + 6\sqrt{5}} - 1}{2(\sqrt{5} + 1)}}{2}}$$

$$\operatorname{sen} 6^\circ = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\sqrt{5} + 1 - \sqrt{15 + 6\sqrt{5}}}{\sqrt{5} + 1}}$$

$$\operatorname{sen} 6^\circ = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4\varphi - 1 - \sqrt{12\varphi + 9}}{2\varphi}}$$

$$\operatorname{sen} 6^\circ = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4\varphi - 1 - \sqrt{(2\varphi + 3)^2 - 4\varphi^2}}{2\varphi}}$$

$$\operatorname{sen} 6^\circ = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4\varphi - \sqrt{3(4\varphi + 3)} - 1}{2\varphi}}$$

De la misma forma:

$$\operatorname{cos} 6^\circ = \pm \sqrt{\frac{1 + \operatorname{cos} 12^\circ}{2}}$$

$$\operatorname{cos} 6^\circ = \pm \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{15 + 6\sqrt{5}} + 1}{2(\sqrt{5} + 1)}}{2}}$$

$$\operatorname{cos} 6^\circ = \pm \sqrt{\frac{\frac{2\sqrt{5} + 2 + \sqrt{15 + 6\sqrt{5}} + 1}{2(\sqrt{5} + 1)}}{2}}$$

$$\operatorname{cos} 6^\circ = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\sqrt{5} + 3 + \sqrt{15 + 6\sqrt{5}}}{\sqrt{5} + 1}}$$

$$\operatorname{cos} 6^\circ = \pm \sqrt{\frac{4\varphi + \sqrt{12\varphi + 9} + 1}{8\varphi}}$$

$$\cos 6^\circ = \sqrt{\frac{16 - (\sqrt{9 - 3\varphi} - \varphi)^2}{16}}$$

$$\cos 6^\circ = \frac{1}{4} \sqrt{(4 - \varphi + \sqrt{9 - 3\varphi})(4 + \varphi - \sqrt{9 - 3\varphi})}$$

$$\cos 6^\circ = \frac{1}{4} \sqrt{7 + 3\varphi + 2\varphi\sqrt{9 - 3\varphi} - \varphi^2}$$

$$\sin 84^\circ = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\sqrt{5} + 3 + \sqrt{15 + 6\sqrt{5}}}{\sqrt{5} + 1}}$$

$$\cos 84^\circ = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\sqrt{5} + 1 - \sqrt{15 + 6\sqrt{5}}}{\sqrt{5} + 1}}$$

De la solución de J. Elliott^{II}

$$\sin 6^\circ = \frac{\sqrt{6}}{8} \sqrt{5 - \sqrt{5}} - \frac{1}{8}(\sqrt{5} + 1)$$

Se puede simplificar usando φ :

$$\sin 6^\circ = \frac{1}{4} \sqrt{9 - 3\varphi} - \frac{\varphi}{4}$$

$$\sin 6^\circ = \frac{\sqrt{9 - 3\varphi} - \varphi}{4}$$

ANGULO DE 3°

$$\sin 3 = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 6}{2}}$$

$$\sin 3 = \pm \sqrt{\frac{1 - \sqrt{\frac{16 - (\sqrt{9 - 3\varphi} - \varphi)^2}{16}}}{2}}$$

$$\cos 3 = \pm \sqrt{\frac{1 + \sqrt{\frac{16 - (\sqrt{9 - 3\varphi} - \varphi)^2}{16}}}{2}}$$

Por otro lado es posible expresar las raíces cuadradas de cualquier número natural en función del número áureo basados en la igualdad: $5 = (2\varphi - 1)^2$

$$\sqrt{2} = \sqrt{(2\varphi - 1)^2 - 3}$$

$$\sqrt{3} = \sqrt{(2\varphi - 1)^2 - 2}$$

$$\sqrt{4} = \sqrt{(2\varphi - 1)^2 - 1}$$

$$\sqrt{5} = \sqrt{(2\varphi - 1)^2}$$

$$\sqrt{6} = \sqrt{(2\varphi - 1)^2 + 1}$$

$$\sqrt{7} = \sqrt{(2\varphi - 1)^2 + 2}$$

$$\sqrt{8} = \sqrt{(2\varphi - 1)^2 + 3}$$

$$\sqrt{9} = \sqrt{(2\varphi - 1)^2 + 4}$$

$$\sqrt{10} = \sqrt{(2\varphi - 1)^2 + 5}$$

...

...

...

$$\sqrt{n} = \sqrt{(2\varphi - 1)^2 + (n - 5)}$$

Así que en teoría cualquier función trigonométrica de un ángulo entero puede expresarse en función del número áureo, aunque resulten expresiones más complejas en algunos casos, la posibilidad de determinar patrones resulta sugerente.

$$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{(2\varphi - 1)^2 - 3}}{2}$$

EJERCICIO

Si $\varphi = 1.618033988 \dots$ es el número áureo demostrar que:

$$\sin 6^\circ = \frac{\sqrt{9 - 3\varphi} - \varphi}{4}$$

Expresión equivalente a:

$$\sin 6^\circ = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15 - 3\sqrt{5}}{2}} - \frac{\sqrt{5} + 1}{8}$$

*Por Rubén D. Muñoz L.
Para MÁS ALLÁ DEL TEOREMA DE PITÁGORAS.*

NOTAS

^I El $\sin(3^\circ)$ publicado por *Blackpenredpen* en internet, que resulta más simple que la publicada por Ignacio Larrosa C. aunque este último publica una tabla del seno y el coseno de ángulos múltiplos de 3 hasta 45°

^{II} Expresión desarrollada y presentada por James Elliott en su canal de Youtube.